

LINEALIDAD

Curvas de Ajuste, Interpolación y Extrapolación

El concepto de linealidad es ampliamente utilizado en la instrumentación analítica e industrial, sin embargo su definición suele ser confusa y su determinación puede llegar a ser compleja.

La regresión lineal es uno de los procedimientos estadísticos más útiles y provechosos disponibles para el metrologo. Siendo también muy utilizadas regresiones de orden mayor y otras regresiones no lineales, así como regresiones múltiples (Fluke. 1994).

La linealidad se sigue analizando mediante métodos de consistencia gráfica, sin embargo el análisis numérico siempre es necesario cuando se requiere de una evaluación cuantitativa. En este escenario el cálculo de curvas de ajuste mediante el método de mínimos cuadrados se hace imprescindible.

EL USO DE CURVAS DE AJUSTE

- ☒ Predecir el valor de un parámetro con respecto al tiempo;
- ☒ Predecir fechas de resultados fuera de especificación (límites de error);
- ☒ Predecir la estabilidad o constancia (confundida con deriva) de patrones;
- ☒ Predecir intervalos de re-calibración;
- ☒ Determinar relaciones (correlaciones) de respuesta contra estímulo;
- ☒ Optimizar modelos de corrección;
- ☒ Comprobación de modelos teóricos;
- ☒ Calcular coeficientes de corrección;
- ☒ Calcular magnitudes de entrada;
- ☒ Estimar la linealidad o no-linealidad de sensores, instrumentos o sistemas de medición;
- ☒ Linealización de sensores de medida;
- ☒ Mejorar las especificaciones de desempeño de un instrumento aplicando correcciones;
- ☒ Interpolación entre valores de referencia;
- ☒ Extrapolación de modelos de medición teóricos.

Somos su Relevo a la Calidad

La Guía MetAs, es el boletín periódico de MetAs & Metrologos Asociados.

En *La Guía MetAs* se presentan noticias de la metrología, artículos e información técnica seleccionada por los colaboradores de MetAs & Metrologos Asociados, que deseamos compartir con nuestros colegas, usuarios, clientes, amigos y con todos aquellos relacionados con la metrología técnica e industrial.

Calle: Jalisco # 313. Colonia: Centro
49 000, Cd. Guzmán, Zapotlán El Grande, Jalisco, México
Teléfono & Fax: 01 (341) 4 13 61 23 & 4 14 69 12 con tres líneas
E-mail: laguiametas@metas.com.mx. Web: www.metas.com.mx

Servicios Metrológicos:

Laboratorio de Calibración:

Presión, Alto Vacío, Temperatura, Humedad, Eléctrica, Vibraciones, Masa, Densidad, Volumen y Óptica

Ingeniería:

Selección de Equipos, Desarrollo de Sistemas de Medición y Software, Reparación y Mantenimiento

Gestión Metrológica:

Subcontratación de Servicios, Outsourcing, Selección de Proveedores, Confirmación Metrológica

Consultoría:

Capacitación, Entrenamiento, Asesoría, Auditorías, Ensayos de Aptitud, Sistemas de Calidad

DEFINICIONES DE LINEALIDAD

Recordemos que el concepto de linealidad no aparece en el VIM3 (2007), incluso ni en el VIM2 (1993), por no ser considerado como un término fundamental o general en metrología. Para los conceptos que se relacionan con los dispositivos para medir que no figuran en la 3a edición del VIM, el mismo VIM en la introducción nos dice que el lector podrá consultar otros vocabularios como el IEC 60050-300 (2001). El Vocabulario Electrotécnico Internacional (IEV) en la norma IEC 60050 (www.electropedia.org) define el concepto de linealidad y el de error lineal, en el contexto de mediciones eléctricas y electrónicas e instrumentos de medición, como se indica a continuación.

Linealidad (de un instrumento de medida) (IEV 311-06-05)

Capacidad de un instrumento de medición para proporcionar una indicación que tenga una relación lineal con una magnitud determinada distinta de una magnitud de influencia.

NOTA: El método de expresión de la falta de linealidad es diferente para los distintos tipos de instrumentos y se establece en cada caso particular.

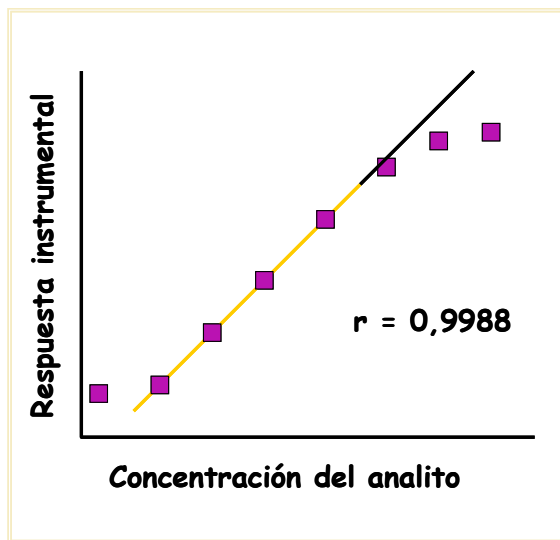
Error lineal (IEV 394-40-31)

Desviación de una línea recta a la curva que representa la magnitud de salida en función de la magnitud de entrada.

En el contexto de validación de métodos de química analítica EURACHEM y CITAC (2000) comentan respecto al concepto de linealidad, como se indican a continuación.

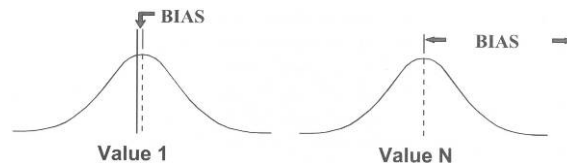
Linealidad (EURACHEM/CITAC. QUAM:2000.P1)

La linealidad es una propiedad importante de los métodos utilizados para efectuar mediciones en un intervalo de concentraciones. La linealidad de la respuesta a patrones puros (MRC) y a muestras realistas puede determinarse. La linealidad generalmente no es cuantificada pero es comprobada mediante inspección o utilizando pruebas de significancia de la no-linealidad. La no-linealidad significativa es usualmente corregida mediante el uso de funciones de calibración no-lineal o eliminada seleccionando un intervalo de operación más restringido. Cualquier desviación residual de la linealidad normalmente es contabilizada por el estimado de la precisión global cubriendo varias concentraciones, o dentro de cualquier incertidumbre asociada a la calibración.



Regresión lineal, uno de los procedimientos estadísticos más útiles y provechosos disponibles para el metrologo

En el contexto de los métodos de análisis de sistemas de medición en la industria automotriz, la AIAG (2002) en el manual de MSA define el concepto de linealidad, como se indica a continuación.

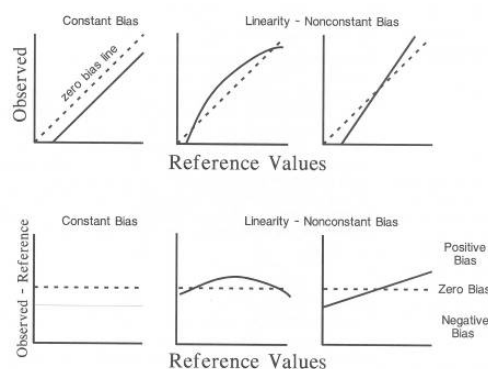


Linealidad (AIAG. MSA 3e)

La diferencia en los errores de sesgo (“bias”) sobre el intervalo de operación (medición) esperado del sistema de medición. En otros términos, la linealidad expresa la correlación de errores de sesgo (sistemáticos) múltiples e independientes sobre el intervalo de operación.

Esto significa que no se puede suponer un sesgo constante a lo largo del intervalo de medición. Posibles causas de no-linealidad incluye:

- El sistema de medición necesita calibración, reducir el intervalo de calibración;
- Mal mantenimiento del sistema de medición;
- Problemas con el patrón;
- Temperatura;
- Humedad;
- Limpieza;
- Mal diseño del sistema de medición.



**Linealidad
no es un
término del
VIM**

En el contexto de la instrumentación y control industrial ISA (Instrument Society of America) define diferentes tipo de linealidad, como se indican a continuación.

Linealidad (ISA-37.1)

1. La proximidad de una curva de calibración a una línea recta determinada.
NOTA: La linealidad es expresada como la desviación máxima de cualquier punto de calibración a una línea recta determinada, durante cualquier ciclo de calibración. Es expresada como “dentro de \pm ___ porcentaje de escala-total de la salida”.
2. La proximidad a la cual una curva se aproxima a una línea recta.
NOTA 1: Usualmente es medida como una no-linealidad y expresada como linealidad; Ej., una desviación máxima entre una curva promedio y una línea recta. La curva promedio es determinada después de realizar dos o más recorridos en todo el intervalo en ambas direcciones. El valor de linealidad es referido a la salida, al menos que se especifique otra cosa.
NOTA 2: Como una especificación de desempeño la linealidad debe expresarse como: linealidad independiente, linealidad basada en los extremos o límites (“terminal”) o linealidad basada en cero. Cuando es expresada simplemente como linealidad se supone que es una linealidad independiente (ISA-51.1).
3. Característica de un dispositivo o sistema que puede describirse mediante una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes (ISA-S26. 1968).
4. El error de linealidad generalmente es la mayor desviación de la mejor línea recta que puede dibujarse a lo largo de los puntos de calibración medidos (error utilizado en la evaluación de conformidad).

Linealidad independiente (ISA-37.1 y 51.1)

1. La desviación máxima de la curva de calibración (promedio de las lecturas en ascenso y descenso de la escala) a una línea recta posicionada para minimizar la desviación máxima (ISA-51.1).
2. Linealidad referida a la mejor línea recta (ISA-37.1).

Mejor línea recta (ISA-37.1)

Línea intermedia entre las dos líneas rectas paralelas más cercanas que juntas y encerrando toda la salida contra los valores medidos en una curva de calibración.

Linealidad de mínimos cuadrados (ISA-37.1)

Linealidad referida a la línea de mínimos cuadrados

Línea de mínimos cuadrados (ISA-37.1)

Línea recta para la cual la suma de los cuadrados de los residuales (desviaciones) está minimizado.

Linealidad basada en los extremos o límites (“terminal”) (ISA-37.1)

Linealidad referida a la línea de extremos.

Linealidad basada en los extremos o límites (“terminal”) (ISA-51.1)

La desviación máxima de la curva de calibración (promedio de las lecturas en ascenso y descenso de la escala) a una línea recta que coincide con la curva de calibración en los valores inferiores y superiores del intervalo.

Linealidad de punto final (“end-point”) (ISA-37.1)

Linealidad referida a la línea de punto final.

Línea de puntos finales (ISA-37.1)

Línea recta entre los puntos finales.

Linealidad basada en (cruce por) cero (ISA-51.1)

La desviación máxima de la curva de calibración (promedio de las lecturas en ascenso y descenso de la escala) a una línea recta posicionada para coincidir con la curva de calibración en el valor inferior de intervalo y para minimizar la desviación máxima.

Linealidad de pendiente teórica (ISA-37.1)

Linealidad referida a la pendiente teórica.

Linealización (ISA-37.1)

El proceso de convertir una respuesta no-lineal (no-línea recta) en una respuesta lineal.

Error residual (ASTM E 456-96); **(residual)**

La diferencia entre el resultado observado y el valor predicho (respuesta estimada al tratamiento); resultado observado menos valor predicho.

PRESENTACIÓN GRÁFICA DE LINEALIDAD

En el siguiente gráfico se muestran dos curvas de calibración (error de ajuste o corrección versus indicación):

1) Una del 0...100 % intervalo nominal de indicación con la cual se muestra gráficamente el concepto de linealidad para:

Pendiente teórica o modelo teórico, el cual supone que el error de ajuste o la corrección de un instrumento ideal es cero a lo largo de todo el intervalo nominal de indicación;

Basada en los extremos ó límites (“terminal”) entre los puntos inferior y superior del intervalo nominal de indicación del 0 % y el 100 %.

2) Otra en un intervalo de medición o trabajo (para el ejemplo solo de 10...90 %) que no cubre todo el intervalo de indicación, mostrando gráficamente los conceptos de linealidad para:

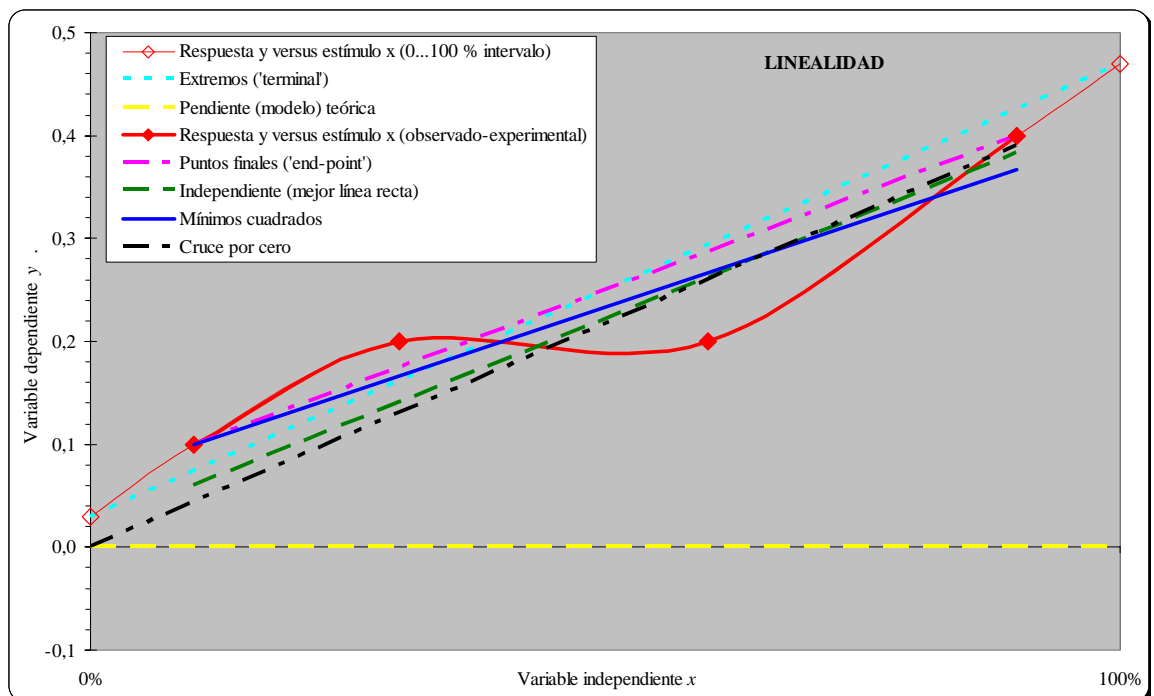
Puntos finales (“end-point”) entre los puntos mínimo y máximo observados experimentalmente en la calibración;

Independiente o mejor línea recta con lo cual la desviación máxima es simétrica por arriba y debajo de la línea recta;

Mínimos cuadrados, con la cual la suma de los cuadrados de las desviaciones se minimiza, y la cual es la más utilizada hoy en día, gracias a la facilidad de cálculo con la computadora, el cual es el método sugerido por la GUM (1995) en su ejemplo H.3 (calibración de un termómetro), para determinar la incertidumbre de una curva de calibración lineal (más adelante se desarrolla un ejemplo numérico paso a paso);

Basada en cero o de cruce por cero, igual a la linealidad independiente de mejor línea recta (incluso similar al método de mínimos cuadrados) pero forzando el cruce por cero ($a_0 = 0$).

Linealidad:
 -Independiente,
 -Mínimos cuadrados,
 -Extremos (“terminal”),
 -Punto final (“end-point”),
 -Cruce por cero,
 -Pendiente teórica.



CALIBRACIÓN → CURVA DE AJUSTE → CORRECCIÓN

Cuando se informe del resultado de la calibración mediante gráficas (curva de calibración o diagrama de calibración) y u o ecuaciones (función de medición) se tendrá una fuente adicional de incertidumbre debido a la estimación de la interpolación, extrapolación o curva de ajuste (regresión) de datos, como se explica más adelante.

Cuando se utilice curva de ajuste para expresar los resultados de la calibración, también debe considerarse la incertidumbre de la curva de ajuste ya sea para cada punto en particular o como un solo valor representativo para todo el intervalo.

Teniendo finalmente que la incertidumbre de la indicación corregida por la curva de ajuste se obtiene aplicando la siguiente ecuación.

$$u_{\text{Indicación Corregida}} = \sqrt{u_{\text{Instrumental}}^2 + u_{\text{Curva de ajuste}}^2}$$

La incertidumbre de la curva de ajuste se determina en función de los errores residuales de la curva de ajuste, evaluando la desviación estándar de los errores residuales, para todo el intervalo:

$$s_{er} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\text{residual}_i)^2}{N - m - 1}}$$

donde:

s_{er} es la desviación estándar de los residuales,
para N puntos con un polinomio de grado m .

ECUACIÓN DE AJUSTE (REGRESIÓN)

Terminología: ¿regresión o curva de ajuste?

Estadísticamente es preferible el término *curva de ajuste* o *ecuación de ajuste*, sin embargo el término *regresión* o *análisis de regresión* es mayormente conocido y utilizado por el siguiente hecho histórico.

En el cambio entre el siglo XIX y el XX el genetista Francis Galton descubrió el fenómeno llamado *regresión a la media*, encontró que los hijos de personas altas tienden a regresar a la altura media de la población, comparado con la altura de sus padres. Padres altos tienden a tener hijos más bajos y viceversa, Galton desarrolló el *análisis de regresión* para estudiar este efecto, al cual el optimistamente se refería como “regresión a la *mediocridad*” (Gonick *et al.* 1993).

Incertidumbre
de la curva de
ajuste
=
Desviación
estándar de los
residuales

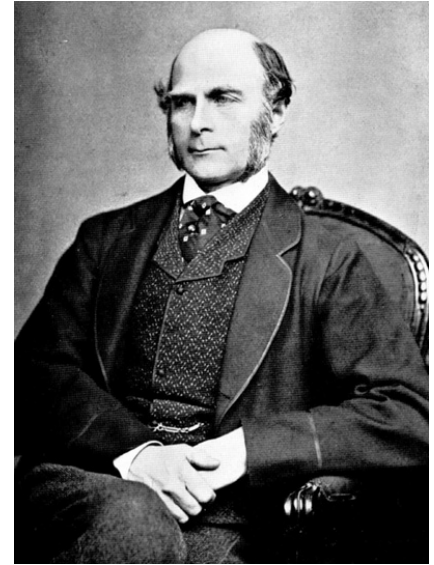
Francis Galton (http://es.wikipedia.org/wiki/Francis_Galton)

Sir Francis Galton (1822-02-16...1911-01-17), explorador y científico británico con un amplio espectro de intereses.

No tuvo cátedras universitarias y realizó la mayoría de sus investigaciones por su cuenta. Sus múltiples contribuciones recibieron reconocimiento formal cuando, a la edad de 87 años, se le concedió el título de Sir o caballero del Reino.

De intereses muy variados, Galton contribuyó a diferentes áreas de la ciencia como la psicología, la biología, la tecnología, la geografía, la estadística o meteorología. A menudo sus investigaciones fueron continuadas dando lugar a nuevas disciplinas.

Primo de Charles Darwin, aplicó sus principios a numerosos campos, principalmente al estudio del ser humano y de las diferencias individuales.



Francis Galton

Regresión,
Quincunx,
Dist. Normal,
Correlación.

Estadística, regresión y correlación

Las investigaciones de Galton fueron fundamentales para la constitución de la ciencia de la estadística:

- ☒ Inventó el uso de la línea de regresión, siendo el primero en explicar el fenómeno de la regresión a la media;
- ☒ En los años setenta y ochenta (1870...1880) fue pionero en el uso de la distribución normal;
- ☒ Inventó la máquina Quincunx, un instrumento para demostrar la ley del error y la distribución normal;
- ☒ Descubrió las propiedades de la distribución normal bivariada y su relación con el análisis de regresión;
- ☒ En 1888 introdujo el concepto de correlación.

Calibración, calibración lineal y curvas de ajuste

Recordando que calibrar es establecer la relación entre los valores de una magnitud indicados por un instrumento y los valores correspondientes de la magnitud realizados por los patrones, es posible expresar esa relación como:

- a) un cuadro (tabla) de calibración;
- b) una curva y diagrama de calibración (gráfica);
- c) una función de medición (ecuación).

Comparada con las otras, la opción c), ofrece más comodidad al usarse y la posibilidad de automatización de cálculos mediante programación, pero a cambio de un aumento de la incertidumbre de los resultados finales.

Prácticamente la calibración de todo instrumento o sistema de medición (a excepción hecha de medidas materializadas que reproducen un solo valor de la magnitud) considera en el método y procedimiento de calibración la *prueba de linealidad* a lo largo del intervalo de medición o trabajo, el intervalo nominal, o el intervalo de indicación.

Determinación del modelo (grado del polinomio)

Considerar las parejas de resultados de calibración $\{x_i, y_i\}$, con $i = 1, 2 \dots N$, las cuales deben ser observaciones independientes, donde las x_i se consideran como variables independientes y su valor se considera el asociado al patrón de calibración, y las y_i como las variables dependientes y sus valores son las indicaciones del instrumento a calibrar. Estos resultados son obtenidos del proceso de calibración y se consideran ya corregidos para las diferentes magnitudes de entrada de acuerdo al método de calibración utilizado.

Una alternativa que sirve mejor al usuario de la calibración es tener una ecuación que aproxime el estímulo, valor verdadero, valor de referencia, corrección o error de ajuste a partir de la respuesta o indicación del instrumento, esto es, invertir la notación dada en el párrafo anterior.

$$\begin{aligned} & \{x_i, y_i\} \\ & \{\text{respuesta } i, \text{ estímulo } i\} \\ & \{\text{indicación } i, \text{ valor verdadero } i\} \\ & \{\text{indicación } i, \text{ valor de referencia } i\} \\ & \{\text{indicación } i, \text{ corrección } i\} \\ & \{\text{indicación } i, \text{ error de ajuste } i\} \\ & \dots \end{aligned}$$

Seleccionar un modelo apropiado para realizar el ajuste de los datos de calibración, para efectos de este método son considerados modelos de: regresión lineal (línea recta) y regresión lineal múltiple definidos como polinomios de grado m , es decir:

$$y_i \cong p(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m$$

Note que la denominación “lineal” no impide que aparezca la variable independiente elevada al cuadrado y a potencias de mayor orden.

Los criterios de selección del tipo de curva y grado de polinomio son diversos:

- ☒ **Experiencia**, propia o de otros laboratorios, usuarios o fabricantes;
- ☒ **Modelo**, empírico o teórico del fenómeno;
- ☒ **Análisis de consistencia gráfica** de los residuos, que requiere que la distribución de los residuos respecto a la curva ajustada sea aleatorio (idealmente distribución normal), la dispersión de los residuos debe mantenerse a lo largo de la curva de regresión;
- ☒ **Análisis estadístico**, en el cual se aumenta el grado del polinomio hasta encontrar la máxima potencia que cumpla:

$$\frac{a_m}{u a_m} \geq t_{95,5\%}(v)$$

donde:

a_m es el coeficiente de la potencia;

$u a_m$ su incertidumbre (desviación estándar experimental de la media o error estándar).

¡No exagerar
en el grado
del
polinomio!

El grado del polinomio queda entonces como m .

El número de grados de libertad para la t de Student es igual al número de puntos menos el grado del polinomio menos 1.

$$v = N - m - 1$$

En ocasiones es posible usar la regresión lineal, lineal múltiple o polinómica haciendo cambios de variable, por ejemplo, si se tiene un comportamiento exponencial cambiar a logaritmos permite aplicar una regresión lineal.

Método de mínimos cuadrados (con algebra matricial)

Aplicar el método de mínimos cuadrados para evaluar los parámetros a_i obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones, en notación matricial;

$$\{y\} = \{a\}^T [X]$$

donde:

T implica matriz transpuesta y

$$\{y\} = \{\Sigma y, \Sigma yx, \Sigma yx^2, \dots, \Sigma yx^m\}^T$$

siendo todas las sumas sobre un solo índice, por ejemplo,

$$\Sigma yx^m = \sum_{i=1}^N x_i^m y_i$$

recordando que N es el número de parejas.

Además,

$$\{a\} = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_m\}^T$$

y

$$[X] = \begin{vmatrix} N & \Sigma x & \Sigma x^2 & \dots & \Sigma x^m \\ \Sigma x & \Sigma x^2 & \Sigma x^3 & \dots & \Sigma x^{m+1} \\ \Sigma x^2 & \Sigma x^3 & \Sigma x^4 & \dots & \Sigma x^{m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma x^m & \Sigma x^{m+1} & \Sigma x^{m+2} & \dots & \Sigma x^{m+m} \end{vmatrix}$$

Método de mínimos cuadrados

Cálculo de los coeficientes

Para evaluar los parámetros a_i se tiene:

$$\{a\} = \{y\}^T [C]$$

donde:

$[C]$ es definida como:

$$[C] = [X]^{-1}$$

$^{-1}$ implica matriz inversa y

$$C_{i,j} \text{ con } i = 0, 1, \dots, m \text{ y } j = 0, 1, 2, \dots, m$$

aquí $[C] = [C]^T$ es una matriz cuadrada simétrica, llamada la matriz de varianza-covarianza.

Incertidumbre global de la curva de ajuste

Evaluar la estimación de la varianza común del conjunto de datos (varianza de los errores residuales) como:

$$s_{er}^2 = \left[\frac{1}{N-m-1} \sum_{i=1}^N [y_i - p(x_i)]^2 \right]$$

donde:

N = Número de parejas u observaciones;

m = Grado del polinomio para la ecuación de calibración;

y_i = Indicaciones (o errores de ajuste, sistemáticos, correcciones) del instrumento obtenidas del proceso de calibración;

$p(x_i)$ = Ecuación de calibración con los valores de los parámetros predichos (pronosticados).

Incertidumbre de los coeficientes

La incertidumbre asociada a cada componente del vector $\{a\}$ se calcula como:

$$ua_i = s_{er} \cdot (C_{ii})^{1/2}$$

donde:

C_{ii} es la componente i de la diagonal de la matriz de varianza-covarianza.

Incertidumbre de los puntos (calibrados, interpolados y extrapolados)

La incertidumbre asociada a cada punto de calibración se obtiene como la desviación estándar punto por punto de los valores pronosticados como:

$$up(x_i) = s_{er} \cdot [\{x\} [C] \{x\}^T]^{1/2}$$

Algebra matricial:

$^{-1}$ inversa,

T transpuesta,

$[]$ cuadrada,

$\{ \}$ vector,

simétrica,

diagonal.

donde:

el vector $\{x\}$ se define como:

$$\{x\} = \{1, x, x^2, \dots, x^m\}$$

Observemos que el valor obtenido de $[\{x\} [C] \{x\}^T]^{1/2}$ es una cantidad escalar, que al multiplicarse por la desviación estándar de los errores residuales s_{er} , queda en unidades de la variable dependiente y_i . El resultado es el valor de la incertidumbre estándar en esas unidades, lo cual es consistente con el modelo propuesto.

Con el conjunto de valores de $np(x_i)$ se forma la curva de límites de incertidumbre estándar (estadísticamente, intervalo de confianza).

EJEMPLO DE ESTIMACIÓN DE CURVA DE AJUSTE

Se muestra un ejemplo numérico desarrollado en Excel® (2003) mediante algebra matricial, para determinar la linealidad mediante una curva de ajuste por el método de mínimos cuadrados, de un conjunto de cuatro parejas de datos a las cuales se aproxima una línea recta, se muestra como aproximar valores e incertidumbres para los puntos observados experimentalmente, valores interpolados y valores extrapolados.

En la siguiente página se muestra el desarrollo, con resultados intermedios paso a paso, así como un cuadro (tabla) de resumen de resultados de valores estimados y límites de confianza a partir de las incertidumbres estimadas, así como la presentación de los resultados en forma gráfica (archivo de Excel disponible a solicitud a: laguiametas@metas.com.mx).

Es importante destacar en el ejemplo, la aplicación del método de mínimos cuadrados para. Estimar la linealidad de los valores observados, estimar valores intermedios (interpolación) por linealidad, estimar valores por tendencia (de una curva suave) dentro del intervalo de indicación más allá del intervalo de medición o trabajo (extrapolación).

El método de mínimos cuadrados permite no solo estimar valores mediante la ecuación de ajuste, sino que también permite estimar la componente aleatoria de los coeficientes y de los valores estimados con esa curva de ajuste, lo cual es una de las etapas de cálculo del método de mínimos cuadrados que no suelen completarse por parte del usuario típico. Sabemos que los errores aleatorios son en si mismos una componente de incertidumbre, la cual se puede estimar mediante la matriz de varianza-covarianza y cuya aplicación en la metrología se muestra más adelante al determinar con que incertidumbre podemos aproximar, relacionar optimizar, predecir, pronosticar, estimar, inferir, interpolar y extrapolar.

¡Precaución!

Las ventajas de suponer un comportamiento suave y regular y de trazar una línea de tendencia por los puntos observados experimentalmente, pueden ser sustanciales. Uno de los beneficios más obvios está asociado con la interpolación y extrapolación, sin embargo esto depende de la hipótesis de comportamiento regular y continuo del sistema, y los valores inferidos basan su validez en la confiabilidad de esa suposición (Baird, 1991).

Resultados de la Calibración		
Puntos	Error E	Indicación I
N	{y _i }	{x _i }
1	0,100	0,000
2	0,200	3,000
3	0,200	6,000
4	0,400	9,000
SUMA	0,900	18,000

Modelo: $y_i \approx p(x_i) = a_0 + a_1 \cdot x_i$

Matriz de Variable Dependiente (vector)		
grado m	{y}	
0	Σy	0,900
1	Σy·x	5,400

Matriz de Variable Independiente (cuadrada)		
[X]		
i-j	0	1
0	4,000	18,000
1	18,000	126,000

Matriz de Varianza-Covarianza (cuadrada simétrica)		
Inversa	[C] = [C] ^T = [X] ⁻¹	
i-j	0	1
0	0,700	-0,100
1	-0,100	0,022

Matriz de Coeficientes (vector)		
{a}	{y} ^T [C] = {y} ^T [X] ⁻¹	
a ₀	0,090	
a ₁	0,0300	

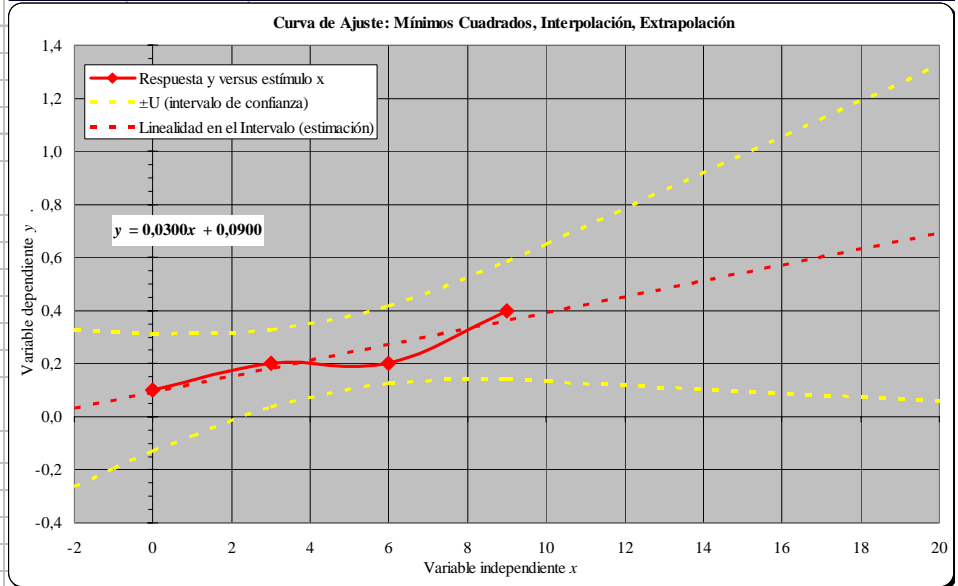
Incertidumbre Estándar de la Curva de Ajuste en el Intervalo (x _{min} ...x _{max})		
Valor Estimado	Error Residual	Desviación Estándar er
p(x _i)	er	s _{er}
0,090	-0,010	±0,059
0,180	-0,020	
0,270	0,070	
0,360	-0,040	

Valor Independiente (interpolarse o extrapolarse)		
x _{min}	x _{max}	x _i
0	9	20

Matriz de Valor Independiente (vector)		
{x}		{x}[C] ^T
1	1,000	-1,300
x _i	20,000	0,344

Cuadro de Intervalos de Confianza @ k = t _{95,5%} (N-m-1) = t _p (v)					4,53	Observaciones
Valor Independiente	Valor Estimado	Incertidumbre Estándar	Incertidumbre Expandida	Límite Inferior de Confianza	Límite Superior de Confianza	
x _i	p(x _i) ≈ y _i	u(x _i)	U(x _i)	p(x _i) - U(x _i)	p(x _i) + U(x _i)	
-2	0,030	±0,065	±0,294	-0,264	0,324	extrapolado
-1	0,060	±0,057	±0,258	-0,198	0,318	extrapolado
0	0,090	±0,049	±0,222	-0,132	0,312	estimación experimental
1	0,120	±0,043	±0,195	-0,075	0,315	interpolado
3	0,180	±0,032	±0,145	0,035	0,325	estimación experimental
6	0,270	±0,032	±0,145	0,125	0,415	estimación experimental
9	0,360	±0,049	±0,222	0,138	0,582	estimación experimental
10	0,390	±0,057	±0,258	0,132	0,648	extrapolado
20	0,690	±0,140	±0,634	0,056	1,324	extrapolado

Nota: los resultados se muestran con cifras significativas adicionales, para fines de validación de cálculos



Incertidumbre Estándar de los Coeficientes	
ua _i	s _{er} · (C _{ii}) ^{1/2}
	±0,049
	±0,0088

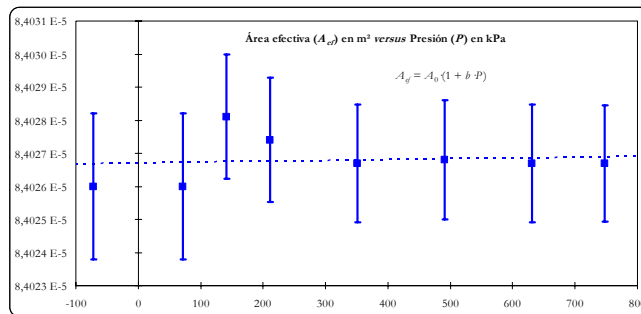
Incertidumbre Estándar Valor Estimado	
up(x _i)	s _{er} · [{x}[C]{x} ^T] ^{1/2}
	±0,140

APLICACIONES EN METROLOGÍA

Calibración de balanzas de presión

Las balanzas de presión (mejor conocidas en la industria como balanzas de pesos muertos) se calibran por el método de flotación cruzada, dando como resultado de la calibración: a) presión a condiciones normalizadas de cada una de las pesas, o b) el área efectiva (A_e) del ensamble pistón+cilindro en función de la presión (P).

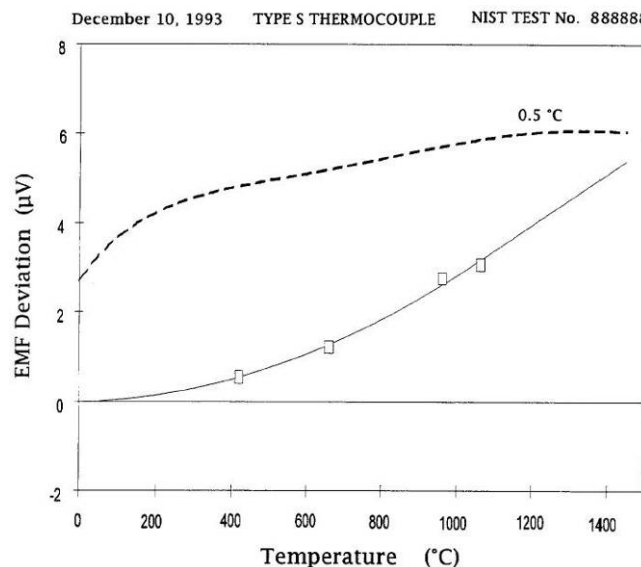
Normalmente se seleccionan puntos de calibración cubriendo de 10...100 % del intervalo, con los cuales se obtiene el comportamiento del área del ensamble pistón+cilindro con la presión, a partir de estos puntos es posible determinar el valor del área (A_0) cuando el P+C esta despresurizado, así como el coeficiente de deformación elástica (b).



Calibración de sensores termopar patrón

Los termopares patrón de tipo S en la escala práctica internacional de temperatura de 1968 (IPIS-68) eran utilizados como termómetros patrón de interpolación para el intervalo de 630,74...1 064,43 °C.

El NIST en su reporte NISTIR 5340 (Ripple *et al.* 1994) indica que calibrando los termopares tipo R o S por el método de puntos fijos, en 4 puntos de solidificación (PS): Zn-Zinc (419,527 °C), Sb-Antimonio (630,62 °C) o Al-Aluminio (660,323 °C), Ag-Plata (961,78 °C) y Au-Oro (1 064,18 °C), permite aproximar por el método de mínimos cuadrados, una función cuadrática (2° orden) que cruce por cero (0 mV @ 0 °C), de las desviaciones de la FEM (fuerza electromotriz) medida con respecto a la FEM de la función de referencia (ITS-90), y los coeficientes resultantes son sumados a la función de referencia para obtener una función polinomial de la relación FEM versus temperatura, extrapolando el intervalo de 0...1450 °C.



En el caso de que el termopar patrón de metal noble (R, S o B) se calibre por comparación directa contra otro termómetro patrón en el intervalo de 100...1 100 °C, con mayor cantidad de puntos (11, uno cada 100 °C) se puede aproximar un función cúbica (3er orden) que cruce por cero, para extrapolando cubrir el intervalo de 0...1 450 °C en los termopares R y S y de 1 550... 1 750 °C en el termopar tipo B.

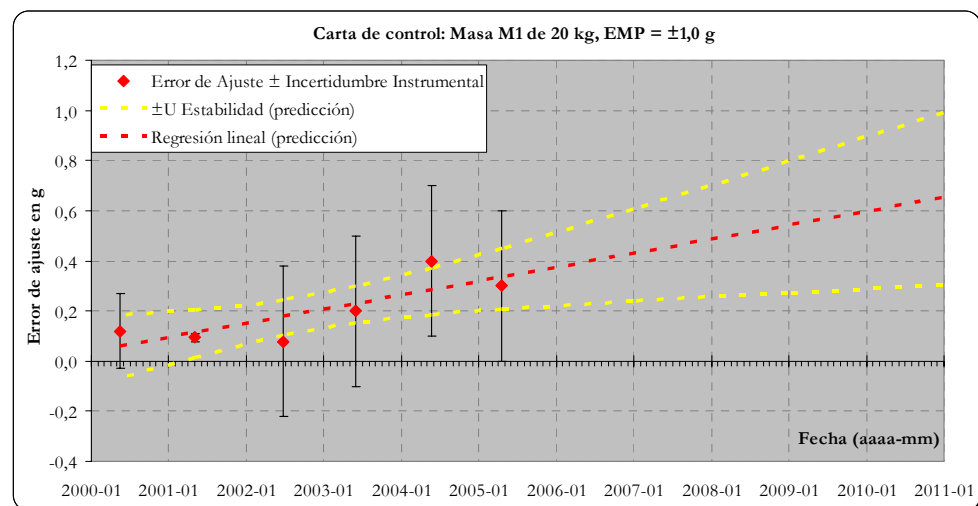
Modelos teóricos
 →
 Aproximación estadística
 →
 Extrapolación del intervalo de medición

Análisis de intervalos de re-calibración

La práctica común de utilizar el último valor de referencia (o verdadero) e incertidumbre instrumental de calibración hasta la próxima calibración, implica suponer que los valores no cambiarán durante el intervalo de re-calibración, y requiere que el metrólogo desarrolle programas de comprobación (verificación) intermedia. Es importante recordar que no es estabilidad lo que se requiere, si no previsibilidad (Fluke. 1994).

La práctica de análisis estadístico es, que dado un conjunto de mediciones obtenidas en el tiempo, se pueden aplicar modelos de predicción estadística, como la regresión lineal (curva de ajuste), permitiendo al metrólogo estimar valores e incertidumbres, como los mostrados en el ejemplo de la carta de control.

$$u_{\text{Indicación Corregida}} = \sqrt{u_{\text{Instrumental}}^2 + u_{\text{Estabilidad}}^2}$$



Predicción estadística
→
Análisis de intervalo de re-calibración

REFERENCIAS

- ASTM 456-96. (1996). Standard Terminology Relating to Quality and Statistics. American Society for Testing and Materials.
- Baird, D. C. (1991). Experimentación: Una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos. Segunda edición. Pearson Educación.
- Excel. (2003). Herramientas - Análisis de datos - Regresión - Ayuda. Microsoft.
- Fluke. (1994). Calibration: Philosophy in practice. Second edition. Fluke corporation.
- Gonick, Larry. & Smith, Woollcott. (1993). The Cartoon Guide to Statistics. HarperPerennial.
- GUM. (1995). Guide to the expression of uncertainty in measurement. BIPM, IEC, ISO, OIML.
- IEC 60050. (2001). International Electrotechnical Vocabulary. www.electropedia.org.
- ISA-51.1-1979. (R1993). Process Instrumentation Terminology. ISA.
- ISA-37.1-1975. (R1982). Electrical Transducer Nomenclature and Terminology. ISA.
- ISA-S26-1968. (1968). Dynamic response testing of process control instrumentation. ISA.
- ISO/IEC 17025. (2005). International Standard: General requirements for the competence of testing and calibration laboratories. ISO / IEC.
- MSA. (2002). Measurement Systems Analysis. 3 Ed. AIAG, Automotive Industry Action Group.
- QUAM:2000.P1. (2000). EURACHEM/CITAC Guide. Quantifying Uncertainty in Analytical Measurement. Second edition.
- Ramírez Ahedo, D. (1995). Curso: Evaluación y expresión de incertidumbres. CENAM.
- Ripple, D. Burns, G. W. & Scroger, M. G. (1994). Assessment of Uncertainties of Thermocouple Calibrations at NIST. NISTIR 5340. January 1994. NIST.
- VIM3 (DGUIDE 99999.2). (2006). International vocabulary of basic and general terms in metrology (VIM) (DRAFT). Third edition. ISO.